

### 第3节 空间点、线、面的位置关系综合小题 (★★☆)

#### 内容提要

本节题目解题的一般方法是根据题干的描述进行空间想象，画出图形，判断正误。画图的基本顺序是：先画面面，再画线面，最后添线；若较难想象，也可借助常见几何体（如正方体等）来辅助判断。

#### 典型例题

【例1】设 $\alpha, \beta$ 为两个平面，则 $\alpha \parallel \beta$ 的充要条件是（ ）

- (A)  $\alpha$ 内有无数条直线与 $\beta$ 平行      (B)  $\alpha$ 内有两条相交直线与 $\beta$ 平行  
(C)  $\alpha, \beta$ 平行于同一条直线      (D)  $\alpha, \beta$ 垂直于同一平面

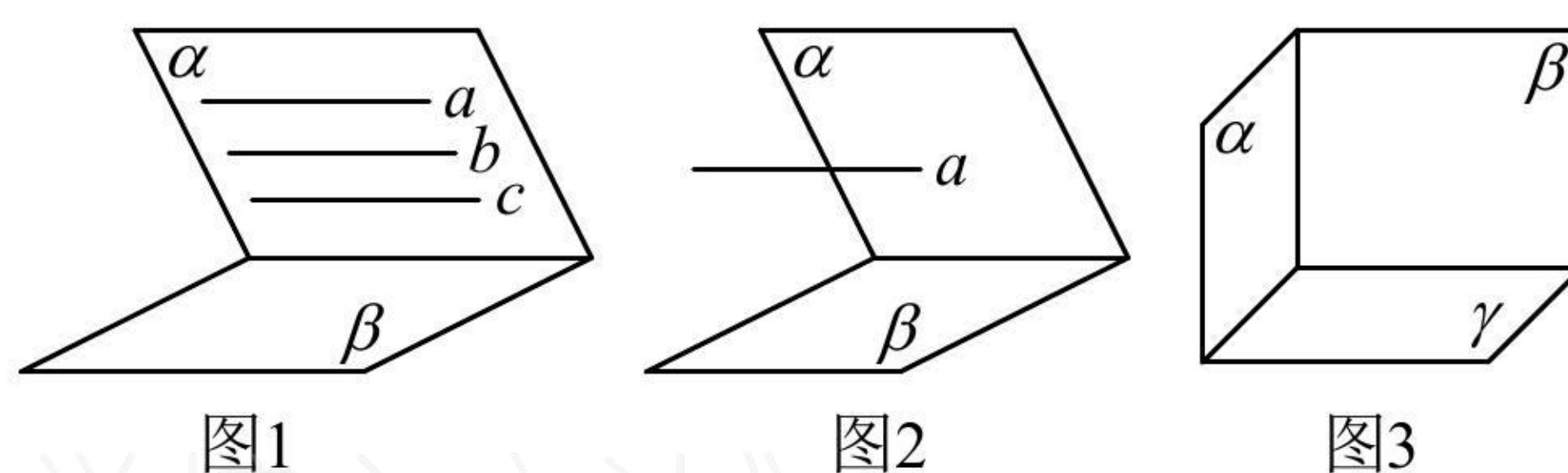
解析：由面面平行的判定定理可以得出B项正确，其余选项为什么错，我们画图来解释，

如图1， $\alpha$ 内有 $a, b, c$ 等无数条平行线均与 $\beta$ 平行，但 $\alpha$ 与 $\beta$ 不平行，故A项错误；

如图2， $\alpha$ 和 $\beta$ 都与直线 $a$ 平行，但 $\alpha$ 与 $\beta$ 不平行，故C项错误；

如图3， $\alpha$ 和 $\beta$ 都与 $\gamma$ 垂直，但 $\alpha$ 与 $\beta$ 不平行，故D项错误。

答案：B



《一数·高考数学核心方法》

【例2】(多选) 已知 $m, n$ 是不同的直线， $\alpha, \beta$ 是不同的平面，则下列四个命题中正确的有（ ）

- (A) 若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta, \alpha \cap \beta = n$ ，则 $m \parallel n$       (B) 若 $m \parallel n, n \subset \alpha$ ，则 $m \parallel \alpha$   
(C) 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp n$ ，则 $\alpha \perp \beta$       (D) 若 $m \perp \alpha, m \perp n, \alpha \parallel \beta$ ，则 $n \parallel \beta$

解析：A项，如图1，可以想象A项是正确的，若要证明，用线面平行的性质定理即可，

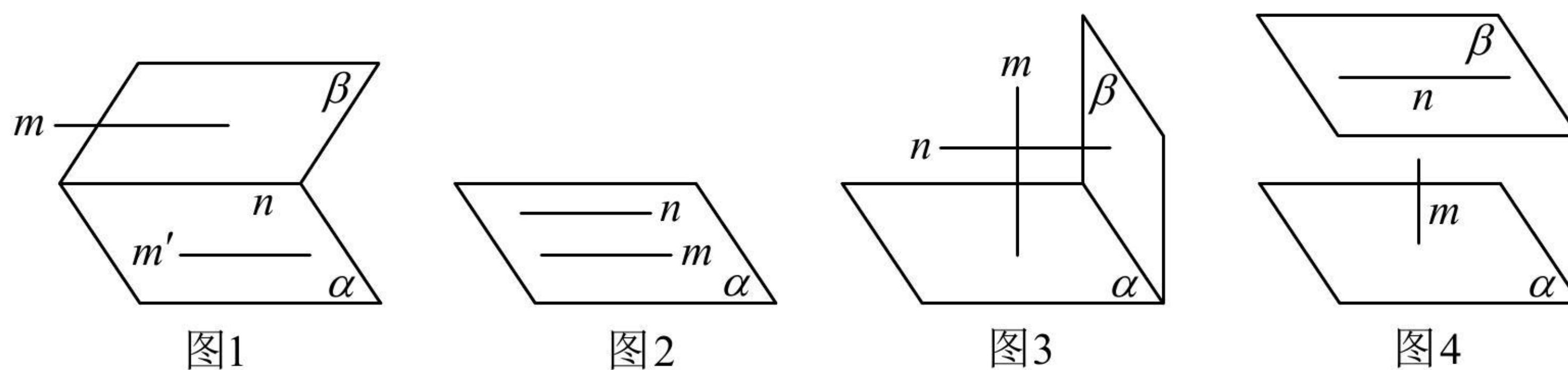
在 $\alpha$ 内取不与 $n$ 重合的直线 $m'$ ，使 $m \parallel m'$ ，则 $m' \parallel \beta$ ，因为 $m' \subset \alpha, \alpha \cap \beta = n$ ，所以 $m' \parallel n$ ，故 $m \parallel n$ ；

B项，观察发现判定线面平行的条件不够，还差 $m \not\subset \alpha$ ，故B项错误，如图2；

C项，如图3，由图可知C项正确；

D项，有面面平行，可先画两个平行的平面，再往里面添线，如图4， $n$ 可以在 $\beta$ 内，故D项错误。

答案：AC



【例3】(多选) 已知 $m, n$ 是两条不同的直线， $\alpha, \beta$ 是两个不同的平面，则下列说法错误的是（ ）

- (A) 若  $m \perp \alpha$ ,  $\alpha \perp \beta$ , 则  $m \parallel \beta$
- (B) 若  $m \parallel \alpha$ ,  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $m \parallel \beta$
- (C) 若  $m \subset \alpha$ ,  $n \subset \alpha$ ,  $m \parallel \beta$ ,  $n \parallel \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$
- (D) 若  $m \perp \alpha$ ,  $m \perp \beta$ ,  $n \perp \alpha$ , 则  $n \perp \beta$

解析: A 项, 有面面关系  $\alpha \perp \beta$ , 先画这两个面, 再画线  $m$ , 如图 1,  $m$  可以在  $\beta$  内, 故 A 项错误;

B 项, 有面面关系  $\alpha \parallel \beta$ , 先画它们, 再由  $m \parallel \alpha$  画  $m$ , 如图 2,  $m$  可以在  $\beta$  内, 故 B 项错误;

C 项, 没说  $m, n$  相交, 不能判定  $\alpha \parallel \beta$ , 如图 3, 故 C 项错误;

D 项, 如图 4, D 项正确.

答案: ABC

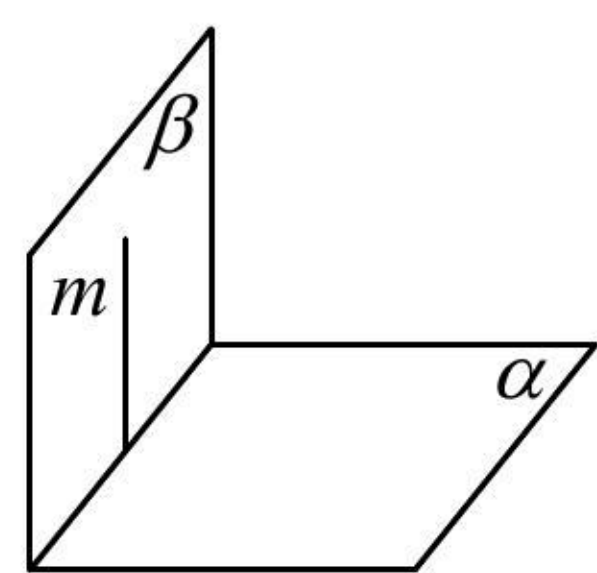


图1

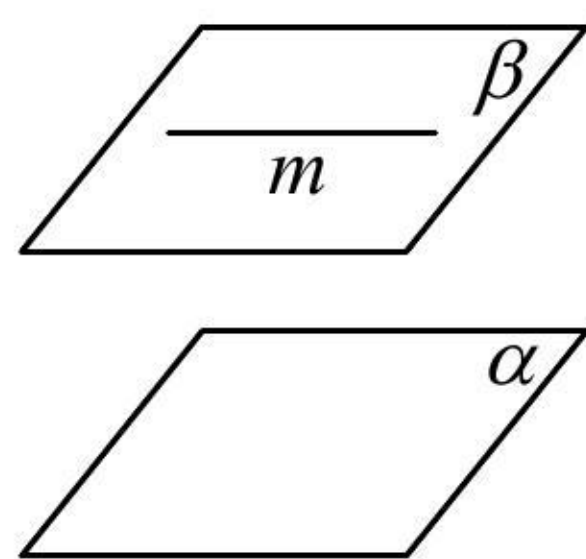


图2

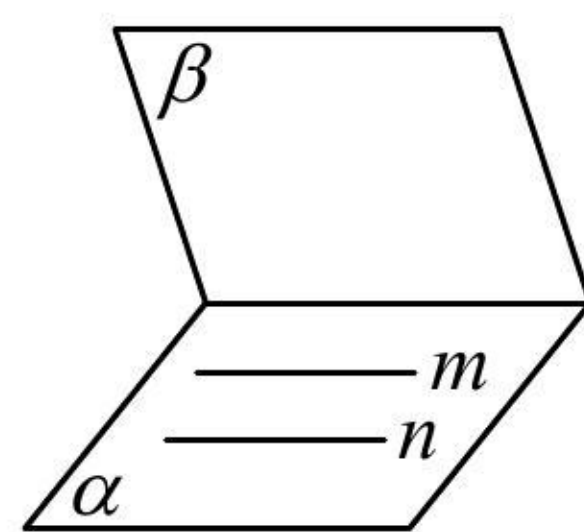


图3

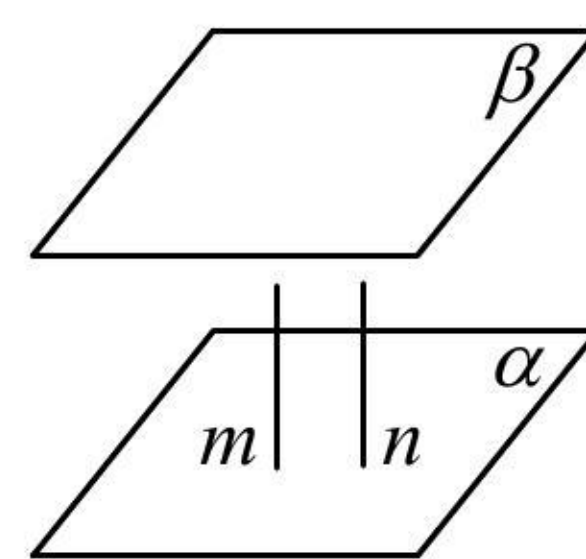


图4

【总结】可以发现, 此类题问法多种多样, 但我们总是画出草图辅助判断. 需注意: 想证明选项错误只需一个反例, 想说明正确则需要严格的论证, 这需要记准所有判定与性质定理.

### 强化训练

《一数·高考数学核心方法》

1. (2023·浙江杭州模拟·★) 设  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面, 则下列结论正确的是 ( )

- (A) 若  $m \parallel \alpha$ ,  $n \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel n$
- (B) 若  $m \perp \beta$ ,  $m \subset \alpha$ , 则  $\alpha \perp \beta$
- (C) 若  $\alpha \perp \beta$ ,  $m \subset \alpha$ , 则  $m \perp \beta$
- (D) 若  $m \subset \alpha$ ,  $n \subset \alpha$ ,  $m \parallel \beta$ ,  $n \parallel \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$

2. (2023·河北模拟·★★) (多选) 已知直线  $a, b$  和平面  $\alpha, \beta, \gamma$ , 下列选项能得到  $\alpha \perp \beta$  的是 ( )

- (A)  $a \parallel \alpha$ ,  $a \parallel \beta$
- (B)  $\gamma \parallel \beta$ ,  $\alpha \perp \gamma$
- (C)  $\alpha \cap \beta = a$ ,  $b \perp a$ ,  $b \subset \beta$
- (D)  $a \perp \beta$ ,  $a \parallel \alpha$

3. (2023·全国模拟·★★★★)(多选) 已知  $m, n$  为异面直线, 直线  $l$  与  $m, n$  都垂直, 则下列说法正确的是 ( )

(A) 若  $l \perp$  平面  $\alpha$ , 则  $m // \alpha, n // \alpha$

(B) 存在平面  $\alpha$ , 使  $l \perp \alpha, m \subset \alpha, n // \alpha$

(C) 有且仅有一对互相平行的平面  $\alpha$  和  $\beta$ , 其中  $m \subset \alpha, n \subset \beta$

(D) 有且仅有一对互相垂直的平面  $\alpha$  和  $\beta$ , 其中  $m \subset \alpha, n \subset \beta$

4. (2023·四省联考·★★★★)(多选) 已知平面  $\alpha \cap$  平面  $\beta = l, B, D$  是  $l$  上两点, 直线  $AB \subset \alpha$  且  $AB \cap l = B$ , 直线  $CD \subset \beta$  且  $CD \cap l = D$ , 下列结论中, 错误的有 ( )

(A) 若  $AB \perp l, CD \perp l$ , 且  $AB = CD$ , 则  $ABCD$  是平行四边形

(B) 若  $M$  是  $AB$  中点,  $N$  是  $CD$  中点, 则  $MN // AC$

(C) 若  $\alpha \perp \beta, AB \perp l, AC \perp l$ , 则  $CD$  在  $\alpha$  上的射影是  $BD$

(D) 直线  $AB, CD$  所成角的大小与二面角  $\alpha - l - \beta$  的大小相等